ELECTROMAGNETISM

1. Câmp magnetic

Pe baza a numeroase experiențe s-a constatat că:

- între doua circuite străbătute de curenți staționari se exercită forțe de atracție sau de respingere, după cum cei doi curenți au acelaşi sens, sau sens contrar;
- dacă în apropierea unui circuit străbătut de un curent staționar este adusă o spira, de asemenea parcursă de un curent staționar, sau un ac magnetic, acestea tind sa se orienteze sub acțiunea unui cuplu de forțe;
- dacă un circuit străbătut de un curent staționar străbate un carton pe a cărui suprafață se află pilitura de fier, aceasta se orientează;
- dacă în apropierea unui magnet permanent este adusă pilitură de fier, cobalt, nichel, aceasta este atrasă. Toate aceste manifestari aparțin unui câmp magnetic. Câmpul magnetic este localizat în jurul circuitelor parcurse de curent şi a magneților permanenți şi exercită forțe sau cupluri de forțe asupra altor circuite parcurse de curent sau corpuri magnetizate.

Forțele magnetice care apar în aceste situații au fost împarțite in 3 categorii:

- forțe electodinamice ce se exercită între circuitele străbătute de curenți staționari;
- forțe electromagnetice ce se exercită între circute parcurse de curent şi corpuri magnetizate;
- forțe magnetostatice, ce se exercită între magneții permanenți.

Câmpul magnetic este caracterizat în fiecare punct de o mărime vectorială, care se numeşte inducție magnetică si se notează cu $\vec{B}$. Unitatea de măsura pentru $\vec{B}$ este tesla în S.I. .

2. Linii de inducție magnetică.Flux magnetic

Câmpul magnetic se caracterizează prin linii de câmp. Acestea sunt curbe tangente în orice punct la vectorul $\vec{B}$. Spre deosebire de liniile câmpului electrostatic, acestea sunt curbe închise.
Totalitatea liniilor de câmp magnetic care strabat o suprafață reprezintă fluxul magnetic:

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = BdS\cos\alpha \quad (1)$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2)$$

Dacă integrala este extinsă la o suprafață închisă, deoarece numarul de linii de câmp care intră în suprafață este acelaşi cu cel care iese din suprafață, rezultă:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3)$$

şi

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V div\ \vec{B}\, dV = 0 \quad (4) \Rightarrow div\ \vec{B} = 0 \quad (5)$$

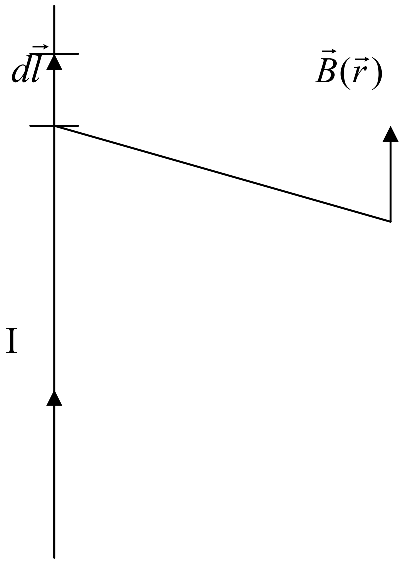
Relațiile (3) şi (5) reprezintă teorema lui Gauss pentru magnetism scrisă sub formă integrală, respectiv diferențială.

3. Legea lui Laplace

La baza determinării inductiei $\vec{B}$ a unui câmp magnetic stă relatia Laplace, stabilită pentru elemente de curent de lungime infinitezimala dl. În acest scop Laplace, considerând un conductor traversat de curentul I, din care limitează porțiunea de lungime elementară dl, căreia îi asociază vectorul $\vec{dl}$ orientat în sensul curentului I şi facând o analogie cu relația de definiție a câmpului electric care era de forma:

$$d\vec{f} \;=\; dq \;\cdot \vec{E}$$

stabilește pentru forța câmpului magnetic, în câmpul de inducție $\vec{B}$ relația:



$$d\vec{f} = Id\vec{l} \times \vec{B} \quad (6)$$

4. Forța Lorentz

Să considerăm un element de circuit de lungime dl şi secțiune S, străbătut de un curent staționar $+\vec{B}$. Deoarece curentul electric reprezintă deplasarea unor purtători de sarcină electrică, forța Lorentz care se exercită asupra porțunilor de conductor reprezintă rezultanta forțelor care se exercită asupra tuturor purtătorilor de sarcină în mişcare prin conductor.
Intensitatea curentului ce străbate elementul de conductor se poate scrie:

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \vec{j} \cdot \vec{S}$$

$\vec{j}$ este vectorul densitate de curent electric. Pentru un singur tip de purtători de sarcină aflați în mişcare , $\vec{j}$ se defineşte ca: $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$
v – viteza purtătorilor.
Dacă în unitatea de volum avem n_0 purtători, fiecare cu sarcina q, atunci expresia densitatii de curent se poate scrie :

$$\vec{j} = n_0 q \vec{v}$$

Într-un conductor filiform $\vec{j}$, $d\vec{l}$, $\vec{S}$ şi $\vec{v}$ sunt vectori coliniari, deci putem exprima elementul de curent sub forma:

$$I \cdot d\vec{l} = \vec{j} \cdot \vec{S} \cdot d\vec{l} = n_0 \cdot q \cdot dV \cdot \vec{n}$$

unde dV am notat elementul de volum $d\vec{l} \cdot \vec{S}$ ocupat de elemntul de conductor filiform. Forța Laplace va fi deci:

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B} = n_{0\cdot} qdV \cdot \vec{v} \times \vec{B} = dNq \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

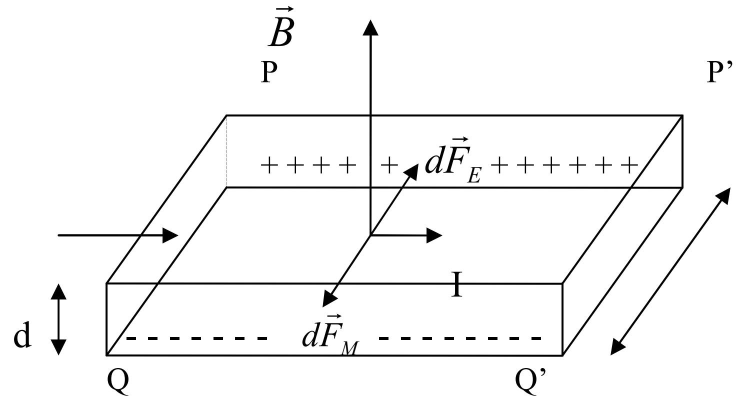
unde dN reprezintă numărul de purtatori din volumul dV . Pentru un singur purtător de sarcină, care se mişcă cu viteza $\vec{v}$ obținem:

$$(7) \quad \vec{F}_\alpha = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$\vec{F}_\alpha$ fiind orientat perpendicular pe direcția vitezei $\vec{v}$ a particulei încarcate, nu poate efectua lucru mecanic, deci nu poate influența valoarea vitezei, ci îi poate schimba numai directia.

5. Efectul Hall

Să considerăm o placă metalică de lațime l şi grosime d străbătută de un curent continuu I. Vectorul densitate de curent este constant şi paralel cu laturile lungi ale plăcuței. Să presupunem că introducem plăcuța într-un câmp de inducție $\vec{B}$ uniform, perpendicular pe fețele mari ale plăcuței.



Sarcinile electrice mobile de câmp conținute într-un element de volum dV, sunt supuse unei forțe magnetice:

$$d\vec{F}_m = \rho dV \cdot \vec{v} \times \vec{B} = \vec{j} \times \vec{B} dV$$

această forta este paralelă cu muchia l, ea modifică traiectoria electronilor mobili, determinând acumularea lor pe o margine a placuței(Q,Q') în timp ce cealaltă margine rămâne încărcată pozitiv (P,P'). Acest fenomen produce un câmp electric $\vec{E}_H \mid\mid$ PQ şi orientat de la + catre - . El exercită asupra sarcinilor din volumul dV o forță electrică:

$$d\vec{F}_H = \rho \vec{E}_H \cdot dV$$

fiind vorba de electroni, aceasta este orientată în sens opus lui $\vec{E}_H$. Ea tinde să readucă traiectoriile electronilor la forma lor inițială.

Când se stabileşte regimul permanent $\vec{j}$ este din nou | | PP'(QQ') şi cele doua forțe sunt egal opuse.

$$\rho \vec{E}_H dV = \vec{j} \times \vec{B} \cdot dV$$

$$\vec{E}_H = \frac{1}{\rho}(\vec{j} \times \vec{B}) \qquad (8)$$

sau

$$(9)\quad \vec{E}_H = -\frac{1}{n_0 e}(\vec{j}\times\vec{B}) = -R_H(\vec{j}\times\vec{B})$$

Expresia (9) exprimă efectul Hall, care constă în apariția unui câmp electric $\vec{E}$ perpendicular pe $\vec{j}$, $\vec{B}$. Efectul Hall se mai poate exprima în funcție de diferența de potențial V_H care corespunde câmpului $\vec{E}_H$. Cum lărgimea plăcuței este l:

$$V_H = E_H \cdot l$$

Grosimea plăcuței fiind d, curentul o strabate:

$$I = j\ s = j\ l\ d$$

$$\frac{V_H}{l} = -R_H \cdot \frac{I}{l \cdot d} \cdot B$$

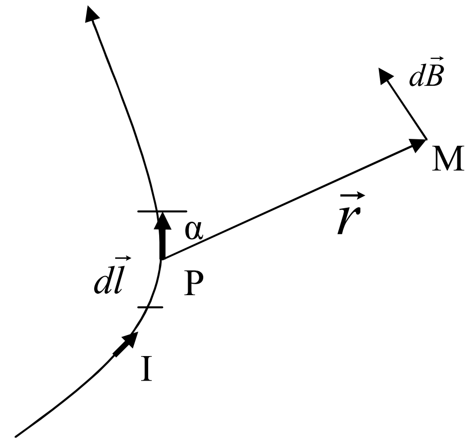
$$(10)\quad V_H = -R_H \cdot \frac{I \cdot B}{d}$$

În această relație toate mărimile introduse sunt usor de măsurat. Se poate determina experimental constanta R_H, numită şi constanta Hall, cu ajutorul căreia se poate deduce densitatea volumică de sarcină, ρ.

4. Efecte magnetice produse de curenți continui

a)Legea lui Biot Savart Laplace

Biot şi Savart au stabilit că intr-un punct M, la o distanță $\vec{r}$ de un element de conductor de lungime *dl* străbătut de un curent de intensitate *I* apare un câmp de inducție magnetică:



$$d\vec{B} = \mu \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3} \qquad (11)$$

unde elementului delungime dl i s-a asociat sensul curentului. Relația (11) reprezintă legea lui Biot – Savart. Ea demonstrează că se poate atribui oricărui curent continu I , aşezat în vecinătatea unui punct P, un câmp de inducție magnetică $d\vec{B}$, care în punctul M este definit după cum urmează:

- $d\vec{B}$ este perpendicular pe planul definit de dl în M;
- este orientat în sensul dat produsului vectorial $d\vec{l} \times \vec{r}$, unde $\vec{r} = P\vec{M}$
- are mărimea (12) $dB = \mu \dfrac{Idl\sin\alpha}{4\pi r^2}$; $\alpha - unghiul(d\vec{l}, P\vec{M})$

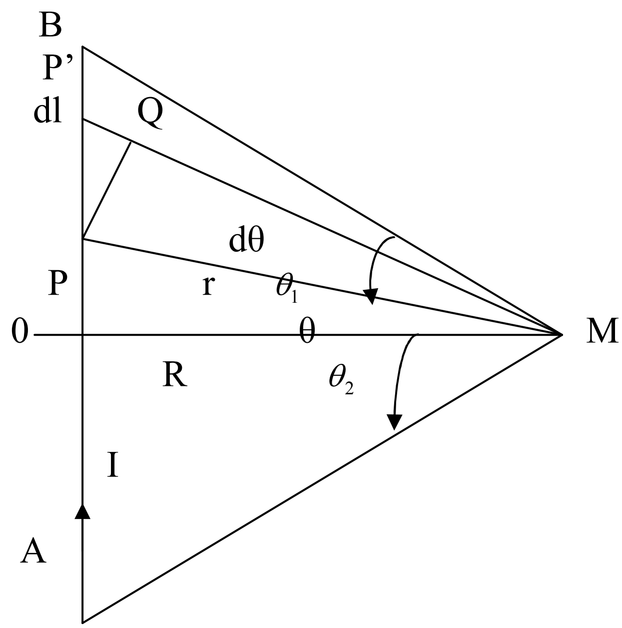
Laplace a generalizat relația (11) şi a arătat că un câmp de inducție magnetică creat de un curent ce strabate un conductor de formă oarecare poate fi exprimat ca suma vectorială a câmpurilor create de porțiuni elementare de conductor, deci:

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_c \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \qquad (13)$$

a) Câmpul magnetic creat de un curent rectiliniu

Să considerăm un conductor filiform, rectiliniu şi foarte lung, parcurs de un curent electric I . Fie punctul M în care vrem să calculam câmpul de

inducție magnetică $\vec{B}$ produs de o porțiune AB din conductor, de lungime finită.



Inducția magnetică se va calcula cu ajutorul relației:

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{AB} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$\vec{B}$ este perpendicular pe planul care trece prin conductor şi punctul M şi are sensul dat de produsul vectorial $d\vec{l} \times \vec{r}$. Rămane să calculam mărimea sa. Să delimităm un element de conducție *dl* delimitat intre punctele infinit apropiate P şi P’. Dacă notez cu R perpendiculara din M pe conductor, atunci distanța PM = *r,* formează cu R un unghi θ, pe care il vom lua drept parametru.

Deci: $r = \dfrac{R}{\cos\,\theta}$

Elementului PP’ de conductor îi corespunde unghiul dθ. Să proiectăm punctul P pe directia eMP’, în punctul Q. Atunci:

$$PQ = dl \cos \theta = rd\theta \Rightarrow$$

$$dl = \frac{rd\theta}{\cos \theta} = \frac{Rd\theta}{\cos^2 \theta} \qquad (14)$$

Deci inducția magnetică $d\vec{B}$ în punctul M va fi:

$$dB = \frac{\mu I dl \cos \theta}{4\pi r^2}$$

sau folosindu-ne de relația (14):

$$(15) \quad dB = \frac{\mu I \cos \theta d\theta}{4\pi R}$$

Prin integrarea relației (15) obținem:

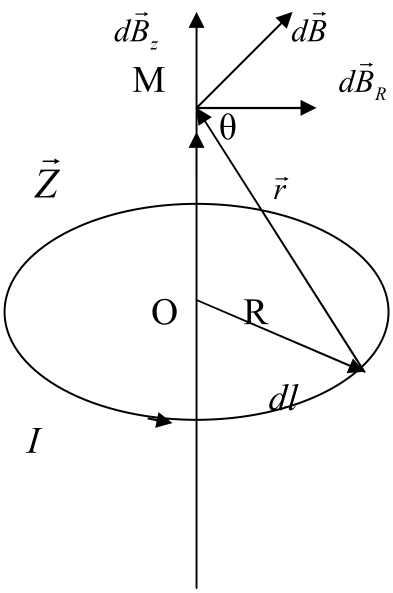
$$(16) \quad B = \frac{\mu I}{4\pi R}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu I}{4\pi R}(\sin \theta_2 - \sin \theta_2)$$

Din această relație rezultă că dacă un conducător filiform de formă oarecare, se îndepărtează de punctul M, câmpul magnetic care îi corespunde în M, tinde către 0, deoarece R crește foarte mult. În plus, dacă distanța Reste neglijabilă în comparație cu OA și OB $\Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{2}; \theta_2 = \frac{\pi}{2}$, iar câmpul produs este acela a unui conductor rectiliniu și infinit:

$$(17) \quad B = \frac{\mu I}{2\pi R}$$

c) Câmpul de inducție magnetică produs de o spiră circulară într-un punct pe axul său

Să considerăm o spiră circulară cu centrul în O străbătută de un curent constant *I*.



Câmpul de inducție magnetică $d\vec{B}$, asociat elementului $d\vec{l}$, este perpendicular pe MP şi are expresia:

$$d\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Să exprimăm pe $\vec{r}$ in funcție de raza R a spirei şi de cota Z a punctului M:

$$\vec{r} = \vec{Z} - \vec{R}$$

$$\Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi}\left(\frac{d\vec{l} \times \vec{Z}}{r^3} - \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{r^3}\right) \quad (18)$$

Relația (18) pune în evidență cele 2 componente ale lui $d\vec{B}$: una după direcția $d\vec{l} \times \vec{R}$, adică după $\vec{Z}$, iar cealaltă după $d\vec{l} \times \vec{Z}$, adică după $\vec{R}$.
Integrând expresia (18) obținem inducția în punctul M. Componenta după OZ, $d\vec{B}_z$ are acelaşi sens independent de poziția lui $d\vec{l}$ pe arc, componenta după $\vec{R}$ în punctul M este anulată de o componentă egală şi de sens contrar, dată de elementul de curent dintr-un punct diametral opus de pe spiră. Deoarece $d\vec{l}$ perpendicular $\vec{R}$:

$$- d\vec{l} \times \vec{R} = \vec{R} \times d\vec{l} = R \cdot dl \frac{\vec{Z}}{Z}$$

şi prin urmare:

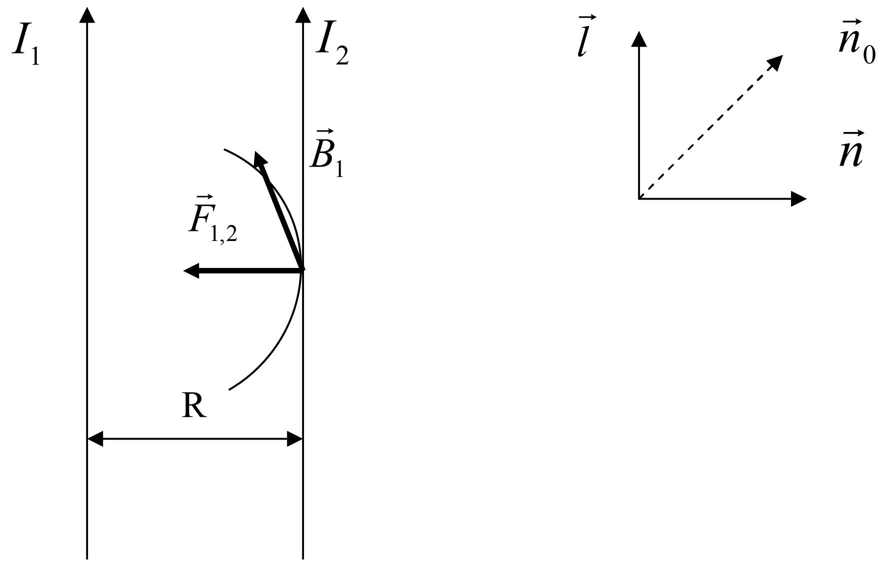
$$(19)\ \vec{B} = \frac{\mu IR}{4\pi r^3} \cdot \frac{\vec{Z}}{Z} \oint_e dl = \frac{2\pi\mu IR^2}{4\pi r^3} \cdot \frac{\vec{Z}}{Z} = \frac{\mu IR^2}{2\pi r^3} \cdot \frac{\vec{Z}}{Z}$$

În particular, în centrul spirei , $\vec{B}$ are expresia:

$$(20)\ \vec{B}_0 = \frac{\mu I}{2R} \cdot \frac{\vec{Z}}{Z}$$

a) Forța electrodinamică

Între 2 conductori străbătuți de curenți electrici apar forțe de interacțiune numite forțe electrodinamice. Pentru a putea stabili expresia acestei forțe, considerăm 2 conductori, filiformi, rectilinii, paraleli, de lungime foarte mare,situați la distanța R unul de altul, şi care sunt străbatuți de curenții staționari $I_1 și I_2$. Fiecare curent se află în câmpul magnetic al celuilalt, deci este solicitat de o forță Laplace. Coductorul I_2 se află în câmpul magnetic creat de I_1, care crează în această regiune o inducție magnetică B_1.



Forța Laplace , cu care $\vec{B}_1$ acționează asupra porțiunii de conductor $d\vec{l}_2$ străbatut de curentul I_2 este:

$$(21)\ d\vec{F}_{1,2} = I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$$

Câmpul de inducție $\vec{B}_1$, produs de I_1 în regiunea curentului I_2 este:

$$(22)\ \vec{B}_{1,2} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}\vec{n}_0$$

Înlocuind (22) în (21) obținem:

$$d\vec{F}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} d\vec{l}_2 \times \vec{n}_0 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} dl_2 \times \vec{n}$$

Forța raportată la unitatea de lungime va fi:

$$(23)\ \vec{f}_{1,2} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}\vec{n}$$

Dacă curenţii $I_1 şi I_2$ sunt de sensuri contrare $I_1 şi I_2 < 0$, rezultă că $\vec{f}_{1,2}$ are acelaşi sens cu $\vec{n}$, este repulsivă. Dacă $I_1 şi I_2 > 0$ rezultă că forţa este de atracţie.

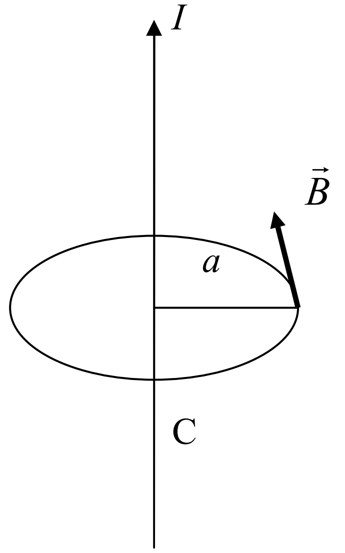
Pe baza expresiei (23) se poate defini unitatea de măsură pentru intensitatea curentului electric în S.I. Se numeşte **amper**. Dacă se adoptă pentru vid şi aer ca:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ N/m$$

atunci amperul este definit ca intensitatea unui curent electric constant, care menţinut în 2 conductori paraleli, rectilinii, de lungime infinită, situaţi in vid la distanţa de 1 m unul de altul, determină o forţă de interacţiune între aceştia de $2 \cdot 10^{-7}\ N/m$.

7.Legea circuitului magnetic. Legea lui Ampere

Să considerăm un conductor rectiliniu traversat de curentul I , ce produce la distanţa *a* de el un câmp de inducţie magnetică:



$$B = \frac{\mu I}{2\pi a}$$

şi să calculăm circulația vectorului $\vec{B}$, de-a lungul conturului închis C, care înlănțuie conductorul străbătut de curent. Vom avea:

$$(24)\quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi a = \mu I$$

Relația (24) poate fi generalizată, în sensul extinderii ei la totalitatea curenților ce sunt înlănțuiți în conturul circuitului C, adică:

$$(25)\quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \sum_i I_i$$

Relațiile (24) şi (25) se mai pot simplifica dacă introducem vectorul $\vec{H}$, definit în orice punct al spațiului astfel: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, unde $\vec{H}$ se numeşte intensitatea câmpului magnetic sau câmp magnetic.

$$(26)\quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

$\vec{H} \cdot d\vec{l} =$ tensiune magnetomotoare

Dar conform teoremei lui Stokes:

$$\left.\begin{array}{l} \oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S rot\vec{H}\cdot d\vec{S} \\ iar \\ I = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_S rot\vec{H}\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} \Rightarrow rot\vec{H} = \vec{j} \qquad (27)$$

ce reprezintă legea lui Ampere scrisă sub formă diferențială.

8. Substanțe în câmp magnetic

S-a constatat experimental că inducția magnetică creată de un curent care se află în vid se deosebeşte de cea creată într-un mediu oarecare. Aceasta se explică prin faptul că orice substanță se magnetizează în prezența unui câmp magnetic exterior, adică prezintă proprietăți magnetice.
Se ştie că un dielectric introdus într-un câmp electrostatic se polarizează; apare un câmp electric propriu, care se suprapune peste câmpul exterior. În mod asemănător, orice mediu magnetic situat în câmp magnetic exterior capătă o stare de magnetizare.

Datorită absenței sarcinilor magnetice libere, acțiunea magnetică a unui corp magnetizat se exprimă cu ajutorul reprezentării date de Ampere, care echivalează curenții elementari cu dipoli magnetici. Astfel magnetismul apare ca un fenomen produs de sarcini electrice în mişcare.
Pentru a explica magnetizarea corpurilor se consideră că în atomii şi moleculele substanțelor există curenți circulari elementari numiți amperieni Aceşti curenți sunt caracterizați printr-un moment magnetic:

$$\vec{m} = I \cdot \vec{S}$$

În absența unui câmp magnetic exterior, momentele magnetice sunt orientate la întâmplare şi ca urmare momentul magnetic rezultant este nul. Substanța nu creează câmp magnetic în jurul său.

Într-un câmp de inducție $\vec{B}_0$ exterior, momentele magnetice se orientează, substanța capată un moment magnetic rezultant şi creează un câmp magnetic propriu $\vec{B}_m$ care se suprapune peste câmpul $\vec{B}_0$.
Câmpul total va fi deci:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$$

Magnetizarea substanțelor se caracterizează prin vectorul magnetizație $\vec{M}$, care reprezintă momentul magnetic al unității de volum.

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$$

Se mai foloseşte deasemenea vectorul intensitate de polarizare sau polarizație magnetică $\vec{J}$, care se defineşte ca:

$$\vec{j} = \mu_0 \vec{M}$$

Asimilând curenții amperieni cu niște dipoli magnetici şi folosind teorema lui Ampere se poate stabili uşor o relație între cele 3 marimi fundamentale în magnetism şi anume $\vec{B}$, $\vec{H}$, $\vec{M}$:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

ELECTRODINAMICA

(Teoria câmpurilor electrice şi magnetice variabile în timp)

1. Inducția electromagnetică

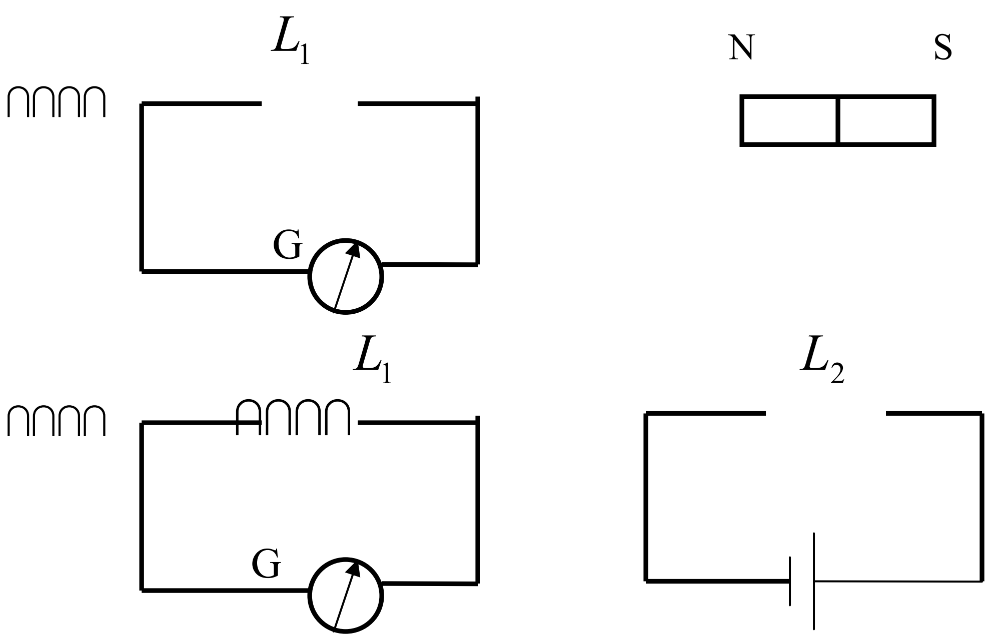
A fost descoperită de Faraday în 1831. putem rezuma condițiile în care se produce în felul urmator.

Când facem să varieze, printr-un procedeu oarecare, fluxul inducției electromagnetice, care traversează un circuit conductor închis, acest circuit este sediul unui curent numit curent indus.

Sensul acestui curent este dat de legea lui Lenz.

Sensul curentului indus este astfel încât fluxul pe care-l produce prin circuitul pe care-l strabate tinde să se opuna variației de flux care i-a dat naştere.

Fenomenul de inducție electromagnetică poate fi pus în evidență printr-o serie de experiențe.

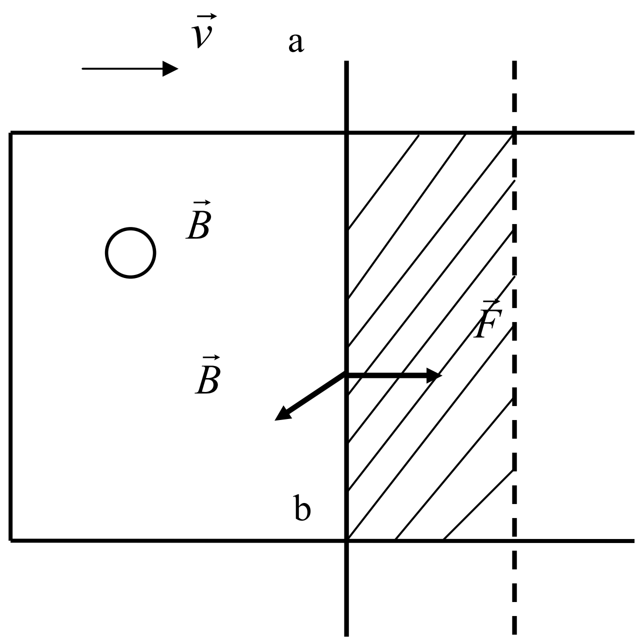


Apropiind un magnet de bobina L_1, acul galvanometrului G deviază indicând un curent electric. Când magnetul se opreşte curentul dispare. La îndepărtarea magnetului curentul reapare, dar de sensul opus celui inițial. Analog dacă în locul magnetului permanent se foloseşte o bobină alimentată la o tensiune electrică.

Din expresia fluxului magnetic care străbate o suprafata S, a carei normală formeaza unghiul φ cu directia câmpului de inducție magnetică,

$$(1)\quad \Phi = BS\cos\varphi = \mu HS\cos\varphi$$

rezultă că fluxul magnetic depinde de patru marimi: $\mu, H, S\ \varphi$. Variația orcărei dintre ele produce variația fluxului Φ, şi ca urmare apare un curent de inducție intr-un circuit aşezat în câmpul respectiv. Pentru creerea unui curent este necesară existența unei tensiuni electromotoare.
Pentru a deduce expresia t.e.m induse vom folosi legea conservării energiei.
Să considerăm un circuit sub formă de U şi o bară transversala (ab) de lungime *l*, mobilă, care poate aluneca de-a lungul celor 2 brațe ale lui U.



Acest circuit este aşezat într-un câmp magnetic de inducție $\vec{B}$, orientat normal la planul cadrului. Sub acțiunea forței $\vec{F}$, latura mobilă se va deplasa cu viteza v – const..

O sarcină de valoare q, care se va mişca şi ea în raport cu bara cu viteza $\vec{v}_0$ va fi supusă atunci unei forțe magnetice :

$$(2)\quad \vec{F} = q(\vec{v} + \vec{v}_0) \times \vec{B}$$

ceea ce este echivalent cu a spune că în conductor există un câmp indus de valoarea:

$$(3)\quad E_i = (\vec{v} + \vec{v}_0) \times \vec{B}, deoarece\ \vec{F} = q\vec{E}$$

Dacă separăm din conductorul ab, porțiunea *dl* , atunci ea este sediul unei t.e.m :

$$d\varepsilon = \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = (\vec{v} + \vec{v}_0) \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} + \vec{v}_0 \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Dar $\vec{v}_0$ paralelă cu $d\vec{l}$ rezultă $\vec{v}_0 \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$, deoarece $\vec{v}_0 \times \vec{B}\text{perpendicular} \cdot pe \cdot d\vec{l} \Rightarrow$

$$(4)\quad d\varepsilon = \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Fie $d\vec{x}$, deplasarea elementului $d\vec{l}$ într-un timp *dt* . Atunci formula (4) se mai poate scrie:

(5)

$$d\varepsilon = (\frac{d\vec{x}}{dt} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}(\vec{x} \times d\vec{l}) \cdot \vec{B} = -\frac{d}{dt}(d\vec{S} \cdot \vec{B})$$

T.e.m indusă ce apare la capetele conductorului:

$$\varepsilon = \int_S -\frac{d(\vec{B}\cdot d\vec{S})}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

(6)

<u>Rezultă că t.e.m indusă este dată de viteza de variație a fluxului de inducție magnetică ce traversează suprafața maturată de conductor.</u>

Semnul (-) indică sensul t.e.m induse în funcție de sensul de variație a fluxului conform legiilui Lenz. Pe baza legii inducției electromagnetice se poate defini unitatea de măsură a fluxului de inducție magnetică:

$$<\Phi>_{SI} = 1V\cdot 1s = 1weber(Wb)$$

adică <u>1 weber este fluxul magnetic ce străbate suprafața unui circuit in care induce o t.e.m de 1 volt, când scade uniform la 0 în timp de 1 secundă.</u>
Cu ajutorul unitații de flux magnetic se poate defini unitatea pentru inducția magnetică:

$$<\Phi>_{SI} = \frac{1Wb}{1m^2} = 1T$$

1T este inducția unui camp magnetic uniform care produce un flux de 1Wb printr-o suprafață de $1m^2$ asezată perpendicular pe liniile de câmp.

2. Relația Maxwell-Faraday

T.e.m am definit-o la capitolul Electrocinetică, ca fiind circulația câmpului electric pe conturul inchis considerat, adica:

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

Utilizând şi de această dată teorema lui Stokes, adica:

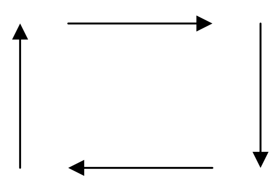
$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S rot\,\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

deoarece conturul C pe care se sprijină suprafaţa S, este considerat fix:

$$\varepsilon = \int_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \int_S rot\vec{E}\cdot d\vec{S} \Rightarrow rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$
(7)

Această relaţie este numită relaţia lui Maxwell-Faraday şi înlocuieşte expresia $rot\vec{E} = 0$ din electrostatică. Ea arată ca în general $rot\vec{E}$ nu este nul. Deci $\vec{E}$ nu derivă dintr-un potenţial, condiţie indispensabilă pentru explicarea curenţilor induşi.

Câmpul vectorial al cărui rotor este diferit de zero, are o circulaţie sau un vârtej. Dacă presupunem ca avem un câmp vectorial de viteză $\vec{v}$ şi rot acestui câmp diferit de zero, atunci viteza în acest câmp arată cam aşa:



De exemplu câmpul de viteze al apei care se scurge într-o cadă are aspectul circulaţiei. Dacă un obiect pluteşte pe suprafaţa apei, el se roteşte.

În cazul apei observăm: $rot\vec{E} = 0$

În cazul câmpului electromagnetic: $rot\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

3. Transformarea energiei electrice în energie mecanică şi invers

Fie $d\Phi$ fluxul care străbate un circuit in intervalul de timp dt, în timpul deplasării circuitului. Dacă curentul prin circuit este I, atunci lucrul mecanic efectuat de forțele electromagnetice va fi:

$$dL = F \cdot dx = IdlBdx = IbdS = Id\Phi$$

Dacă câmpul magnetic este independent de timp, în decursul acestei deplasării t.e.m indusă: $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$

Ea determină în circuit o disipare de energie:

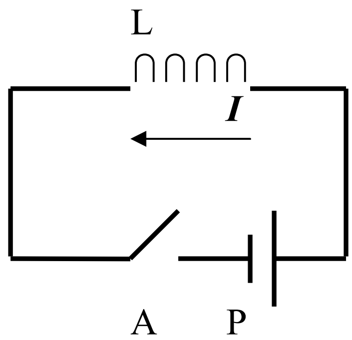
$$dW = \varepsilon idt = -Id\Phi \Rightarrow dL = -dW \quad (8)$$

Energia electrică produsă prin fenomenul de inducție este egală cu lucrul mecanic pe care forțele exterioare circuitului au trebuit să-l efectueze, pentru a echilibra forțele electromagnetice şi să permită deplasarea.

Dacă energia electrică este pozitivă, sistemul se comportă ca un generator. Din contră, dacă energia electrică este negativă, înseamnă că circuitul a absorbit energie electrică, însă a produs lucru mecanic. El se comportă deci ca un motor.

4. Autoinductia

Fenomenul de autoinducție constă în apariția unei t.e.m induse în propriul circuit în care are loc o variație a fluxului magnetic. Dacă intensitatea curentului variază se modifică şi câmpul magnetic din circuit, deci variază în mod corespunzător şi fluxul magnetic, care străbate suprafața marginită de circuit. Datorită variației fluxului în propriu circuit, ia naştere un curent indus, care se suparapune peste curentul inițial.



La închiderea circuitului curentul creşte de la 0 la ***I***, apare o t.e.m indusă ε_i , care dă naştere , conform legii lui Lenz, în bobină la un curent indus de sens contrar lui ***I*** (extracurent de închidere).
Ca urmare creşterea curentului la stabilirea contactului electric se face mai încet decat în lipsa extracurentului de închidere.
În mod analog la deschiderea întrerupătorului, intensitatea variind de la ***I*** → 0, apare un curent indus de acelaşi sens cu ***I.*** Dacă intreruperea circuitului se face într-un timp foarte scurt, t.e.m indusă este foarte mare şi se stabileşte între cele 2 capete ale întrerupătorului electric o diferență de potențial suficient pentru a face să apară o scânteie electrică prin aerul care le separă.

Un circuit parcurs de curentul ***I*** este traversat de un flux Φ produs de propriul curent. Cum câmpul magnetic în fiecare punctul depinde ***I*** şi fluxul va fi proporțional cu ***I.***
Deci putem scrie:

$$\Phi = L \cdot \mathrm{I} \quad (9)$$

coeficientul L fiind coeficientul de autoinducție sau inductanța circuitului.
Dacă fluxul Φ variază în timp, apare în circuit o t.e.m de autoinducție:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(L \cdot I)}{dt}$$

Cazul cel mai important este cel a unui circuit nedeformabil parcurs de un curent variabil,inductanța este atunci constantă şi putem scrie:

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$$

T.e.m autoindusă este proporțională cu derivata curentului în raport cu timpul şi tinde conform legii lui Lenz, să producă un curent care se opune variației curentului din circuit.

5. Energia câmpului magnetic

Să considerăm o bobină de formă toroidală, formată din N spire şi alimentată la o t.e.m ε.
Energia electrică debitată de sursă în intervalul de timp ***dt*** este :

$$dW = \varepsilon \cdot idt$$

Pe seama acestei energii în bobină ia naştere un câmp dH. Când curentul prin bobină variază de la ***0*** $\longrightarrow$ ***I*** câmpul magnetic creşte de la 0 $\longrightarrow$ H şi corespunzător variază şi fluxul magnetic. Apare o t.e.m de autoinducție care tinde să echilibreze în fiecare moment t.e.m a sursei. T.e.m de autoinducție se poate scrie:

$$|\varepsilon_i| = L\frac{di}{dt}$$

Energia electrică debitată de sursă şi înmagazinată în bobină sub formă de energie magnetică va fi:

$$(11)\ W = \int_0^I Lidi = \frac{1}{2}LI^2$$

Ținând cont că $\Phi = L \cdot I$ şi că fluxul care străbate cele N spire ale bobinei, se poate scrie şi sub forma $\Phi = N \cdot B \cdot S$ (S - secțiunea transversală a bobinei)

$$W = \frac{1}{2}\Phi \cdot I = \frac{1}{2}N \cdot B \cdot S \cdot I$$

Pe de altă parte intensitatea curentului se poate exprima cu ajutorul teoremei lui Ampere.

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \,; H \cdot L = N \cdot I \Rightarrow I = \frac{H \cdot l}{N}$$

Ca urmare expresia energiei magnetice devine:

$$W = \frac{1}{2}N \cdot B \cdot S\,\frac{H \cdot l}{N} = \frac{1}{2}B \cdot H \cdot V \qquad (12)$$

Densitatea de energie magnetică în volumul in care este concentrat câmpul magnetic se va exprima deci ca:

$$w = \frac{1}{2}B \cdot H = \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 \qquad (13)$$

expresie similară cu cea a densității de energie a câmpului electric.

6. Curentul de deplasare

În capitolul anterior am stabilit ecuația de continuitate care exprimă legea conservării sarcinilor electrice sub formă:

$$div\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

În regim staționar, când mărimile electrice nu variază în timp ρ=constant, ecuația de continuitate a liniilor de curent staționar se exprimă ca:

$$div\ \vec{j}\ =\ 0$$

ceea ce arată că <u>liniile curentului staționar sunt închise</u>.

Dacă regimul este variabil adică $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$, atunci ecuația de continuitate trebuie considerată sub forma ei generală, adică:

$$div\ \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$, dar $div\vec{D} = \rho$, legea lui Gauss generalizată.

În acest caz datorită termenului $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, liniile curentului de conducție nu mai sunt curbe închise.

Dar după cum am arătat:

$$\begin{cases} div\,\vec{B} = 0 \\ rot\,\vec{B} = \mu\vec{j} \end{cases} \Rightarrow div\vec{j} = \frac{1}{\mu} div\,(rot\,\vec{B}) = 0\, sau\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0$$

deci liniile de curent trebuie să fie închise, condiție care nu poate fi respectată datorită ecuației:

$$div\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}(div\ \vec{D}) = 0$$

Rezolvarea acestei probleme a fost realizată de Maxwell prin introducerea noțiunii de curent de deplasare. Într-adevăr dacă reluăm ecuația de continuitate în regim variabil, putem scrie:

$$div\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}(div\,\vec{D}) = div\vec{j} + div\left(\frac{\partial D}{\partial t}\right) = 0$$

$$div\left(\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)=0$$

Putem defini astfel un curent total a cărui densitate $\vec{j}_{T,}\vec{j}_{T,} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ (14)

este alcătuită din 2 termeni $\vec{j}$ - densitatea curentului de conducție şi $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ care a fost denumită densitatea curentului de deplasare.

Deoarece curentul de conducție este diferit de zero numai în conductori, rezultă că, curentul de deplasare va prelungi liniile de curent electric prin dielectrici şi în vid. Deci şi în regim variabil, liniile curentului total sunt linii închise:

$$div\left(\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)=0$$

$$rot\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad (15)$$

7. Sensul fizic al curentului de deplasare

Se consideră un condensator introdus în circuitul unui curent alternativ. Evident într-un astfel de circuit $\frac{\partial\rho}{\partial t}\neq 0$. Relația de definiție a vectorului de inducție electrică este:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

sau ținând cont că:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_P$$

rezultă:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (\vec{E}_0 + \vec{E}_P) + \vec{P}$$

Dacă considerăm valorile absolute ale mărimilor fizice:

$$D = \varepsilon_0 E_0 - \varepsilon_0 E_P + P$$

şi deci curentul de deplasare se scrie:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_0}{\partial t} - \varepsilon_0 \frac{\partial E_P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} \tag{16}$$

Termenul $\frac{\partial P}{\partial t}$ este numit curent de polarizare şi se datorează deplasării sarcinilor electrice legate, în timpul variației polarizației dielectricului sub acțiunea câmpului electric variabil dintre plăcile condensatorului. Deoarece $\frac{\partial P}{\partial t}$ reprezintă viteza de deplasare a sarcinilor legate şi reale din dielectric, ei îi corespunde un câmp magnetic care se poate calcula după legea Biot-Savart-Laplace ca şi câmpul creat de curentul de conducție $\vec{j}$.

În absența dielectricului, când liniile între placile condensatorului este vid:

$$P = 0, \frac{\partial P}{\partial t} = 0, E_P = 0, \frac{\partial E_P}{\partial t} = 0$$

Prin urmare în vid, densitatea curentului de deplasare este:

$$j_{d_{vid}} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_0}{\partial t}$$

Maxwell a presupus că acest curent de deplasare nu este numai o noțiune formala, ci el creeează în jurul sau un câmp magnetic, după aceleaşi legi ca şi $\frac{\partial P}{\partial t}$ şi $\vec{j}$. Numeroase experimente au confirmat această presupunere. S-a constatat că orice câmp electric variabil, $\frac{\partial E_0}{\partial t} \neq 0$ creează un câmp magnetic variabil, acesta fiind fenomenul de <u>inducție magnetoelectrică.</u>

Curentul de deplasare apare oriunde există câmp electric variabil, prin urmare şi în interiorul conductorilor parcurşi de curent variabil, însă în interiorul conductorului el este neglijabil de mic față de curentul de conducție.

Apare însă,următoare întrebare: cui se datorează curentul electric în vid. Poate fi el legat de deplasarea unor sarcini electrice, pentru ca în felul acesta să se înțeleagă că orice câmp magnetic este generat prin unicul macanism fizic cunoscut pâna în prezent.

Din punct de vedere clasic, curentul de deplasare în vid nu are sens intuitiv, nu poate fi legat de deplasarea unor sarcini electrice. Introducerea sa se justifică prin verificarea consecinților sale.

În teoria cuantică este posibil să se dea următoarea interpretare: în vid există sarcini electrice pozitive şi negative – electroni, pozitroni, etc – în astfel de stări energetice încât nu pot f i observate în mod obişnuit.

În prezența unui câmp electric variabil, vidul poate fi „polarizat" şi astfel apare curentul $\varepsilon_0 \frac{\partial E_0}{\partial t}$.

8. Câmp electromagnetic

Am arătat că un câmp electric variabil crează un curent de deplasare, care la rândul sau creează un câmp magnetic variabil.

Un câmp magnetic variabil produce la rândul său un câmp electric variabil. De la fenomenul de inducție electromagnetică se cunoaşte că un câmp magnetic variabil produce într-un circuit o t.e.m de inducție.

Generalizâmd aceste rezultate Maxwell ajunge la concluzia că: în toate punctele spațiului unde există un câmp magnetic variabil în timp, apare un câmp electric indiferent dacă în locul respectiv există sau nu un conductor. Astfel spus, orice câmp magnetic variabil în timp este legat de prezența unui câmp electric. Spațiul ocupat de un câmp electric variabil în timp este în acelaşi timp, ocupat de un câmp magnetic variabil în timp.

Cele 2 câmpuri electric şimagnetic sunt legate între ele şi formează o unitate numită câmp electromagnetic.

9. Ecuațiile lui Maxwell

Descrierea câmpului electromagnetic va fi completă dacă se cunosc marimile $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$. Aceste mărimi definesc într-un punct al spațiului câmpul electromagnetic.

Maxwell a dat o formulare generală a legilor electromagnetismului sub forma unui sistem de ecuații, cunoscut sub numele de ecuațiile lui Maxwell. A generalizat teorema lui Ampere în sensul că introduce în ea, pe lângă curentul de conducție şi curentul de deplasare, stabilind că:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_i + I_d$$

Acesta este prima ecuație a lui Maxwell scrisă sub formă integrală.
Forma locală corespunzătoare:

$$\left.\begin{aligned} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_S rot\vec{H} \cdot d\vec{S} \\ I_c + I_d &= \int_S (\vec{j}_c + \vec{j}_d) d\vec{S} \end{aligned}\right\} \Rightarrow rot\vec{H} = \vec{j}_c + \vec{j}_d \Rightarrow rot\vec{H} = \vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Aceasta este ecuația Maxwell scrisă sub formă locală care se poate interpreta astfel: orice câmp electric variabil în timp $\frac{\partial D}{\partial t}$ produce în jurul său un câmp magnetic variabil $\vec{H}$.

Ecuația a doua a lui Maxwell reprezintă o generalizare a legii lui Faraday cu privire la fenomenul de inducție electromagnetică: $E_i = -\frac{d\Phi}{dt}$.

T.e.m indusă ε_i reprezintă ciculaţia câmpului electric Indus pe întregul circuit adică:

$$\varepsilon_i = \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$

$$\oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Aceasta reprezintă a doua ecuaţie a lui Maxwel scrisă sub formă integrală. Trecerea către forma locală se face astfel:

$$\left.\begin{aligned} &\oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ &\oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \int_S rot\vec{E} \cdot d\vec{S} \end{aligned}\right\} \Rightarrow rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} sau \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Orice câmp magnetic variabil $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ creează în jurul său un câmp electric variabil cu linii de câmp inchise.

La cele două ecuaţii stabilite mai sus se mai adaugă teorema luiGauss dine electrostatică:

$$div\,\vec{D} = \rho sau\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

şi teorema lui Gauss din magnetism:

$$div\,\vec{B} = 0 sau\ \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Sistemul de ecuaţii considerat de Maxwell este deci:

$$\begin{cases} ro\vec{t}\,\vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ ro\vec{t}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div\vec{D} = \rho \\ div\vec{B} = 0 \end{cases}$$ (17) Ecuațiile lui Maxwell

Acest sistem de ecuații stă la baza teoriei câmpului electromagnetic şi a undelor electromagnetice care se propagă prin interiorul acestui câmp.

Pentru a determina câmpurile electrice şi magnetice, ecuațiile lui Maxwell se mai completează cu aşa numitele relații de material impuse de polarizarea electrică şi magnetică a corpurilor, care se exprimă prin:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{j}$$

Pentru mediile conductoare se mai adaugă şi legea lui Ohm sub formă locală:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_i)$$

Sistemul de ecuații a lui Maxwell se poate scrie şi cu ajutorul operatorului nabla "∇":

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$ (18)

10. Undele electromagnetice

Din analiza sistemului de ecuații Maxwell (18) se ajunge la următoarea concluzie:

- orice câmp magnetic variabil în timp, produce în regiunea din spațiu pe care o ocupă, un cîmp electric variabil în timp, a cărui linii de câmp sunt curbe închise;
- orice câmp electric variabil în timp, produce în regiunea din spațiu pe care o ocupî un câmp magnetic variabil, a cîrui linii de câmp sunt curbe închise.

Asamblul celor 2 câmpuri care se generează reciproc şi sunt localizate simultan în aceeaşi regiune din spațiu se numeşte <u>câmp electromagnetic</u>.
Ambele componente ala câmpului electromagnetic au liniile închise, deci sunt rotaționale.

Dacă, un câmp electromagnetic este creat într-o porțiune limitată a spațiului, atunci, după cum arată experiența, el se propagă în restul spațiului cu o viteză finită, care în vid coincide cu viteza luminii $c = 3 \cdot 10^8\ m/s$.
Propagarea câmpului electromagnetic se face sub forma unei unde. Pentru a arăta acest lucru să considerăm un mediu omogen şi izotrop şi fără distribuție volumică de sarcină, adica:

$$\varepsilon = \text{const.}; \mu = \text{const.}; \rho = 0 \Rightarrow \vec{j} = 0$$

atunci sistemul de ecuații Maxwell (18) devine:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{cases} \qquad (19)$$

Aplicăm operatorul rotor primei ecuații (19):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \varepsilon \nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\underbrace{\nabla (\nabla \cdot \vec{H})}_{0} - \nabla^2 H = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E})$$

$$-\Delta H = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \Rightarrow \Delta \vec{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} (20)$$

Dacă se compară ecuația (20) cu ecuația de propagare a undelor:

$$\Delta \Psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

se constată că ele au acelaşi formă. Din această comparație se poate deduce viteza de propagare a cîmpului electromagnetic.

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r \mu_r}} \quad (21)$$

În concluzie, câmpul magnetic nu este localizat în spațiu ci se propagă sub forma unei unde cu viteza $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$. În mod anlog, aplicând rotorul ecuației a doua a sistemului (19), obținem:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B})$$

$$\underbrace{\nabla (\nabla \cdot \vec{E})}_{0} - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 (22)$$

Câmpul electric, de asemenea, nu este localizat în spațiu, ci se propagă sub forma unei unde cu viteza $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$ ca şi câmpul magnetic.

Cele 2 unde se propagă aşadar simultan în spaţiu, şi constituie ceea ce se numeşte o undă electromagnetică.

După cum ştim, una din soluțiile ecuației diferențiale a undelor o reprezintă unda plană. Dacă alegem 0x direcția de propagare, atunci $\vec{E}$ şi $\vec{H}$, trebuie să depindă numai de variabilele(x,t). Soluția sub formă de undă plană are expresia:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\omega t - kx); k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = nr.deund\breve{a} \\ \vec{H} = \vec{H}_0 \sin(\omega t - kx); \omega = kv = \ pulsatia \end{cases} \quad (23)$$

Aceste unde plane se pot scrie şi sub formă complexă:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - kx)} \quad (24)$$

În acest caz operatorul nabla: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ se reduce la:

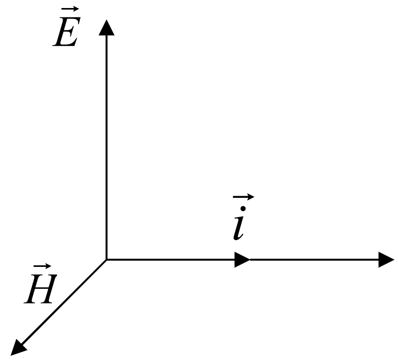
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} = (-ik)\vec{i} \quad (25)$$

Ținând cont de (25) ultimele 2 ecuații din (19) devin:

$$\left.\begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{B} = (-ik\mu)\vec{i} \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = (-ik\varepsilon)\vec{i} \cdot \vec{E} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{i} \perp \vec{H} \\ \vec{i} \perp \vec{E} \end{cases} \quad (26)$$

Rezultă ca vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ sunt perpendiculari pe direcția de propagare a undei. Deci, <u>undele electromagnetice plane sunt unde transversale</u>.

O altă proprietate importantă a undelor electromagnetice este aceea că $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ sunt perpendiculari între ei şi deci impreună cu $\vec{i}$ alcătuiesc un triedru.



Să demonstrăm această afirmație. Tinând cont de faptul că undele sunt plane de forma (24), putem scrie:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \mu H_0 i \omega e^{i(\omega t - kx)} = \mu i \omega \vec{H} \\ \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon i \omega \vec{E} \end{cases}$$

Primele două ecuații din sistemul (19) devin:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow (-ik)\vec{i} \times \vec{H} = i\omega \varepsilon \vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow (-ik)\vec{i} \times \vec{E} = i\omega \mu \vec{H} \\ cu : k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{\mathrm{c} \cdot T} = \dfrac{\omega}{\mathrm{c}} = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \end{cases}$$

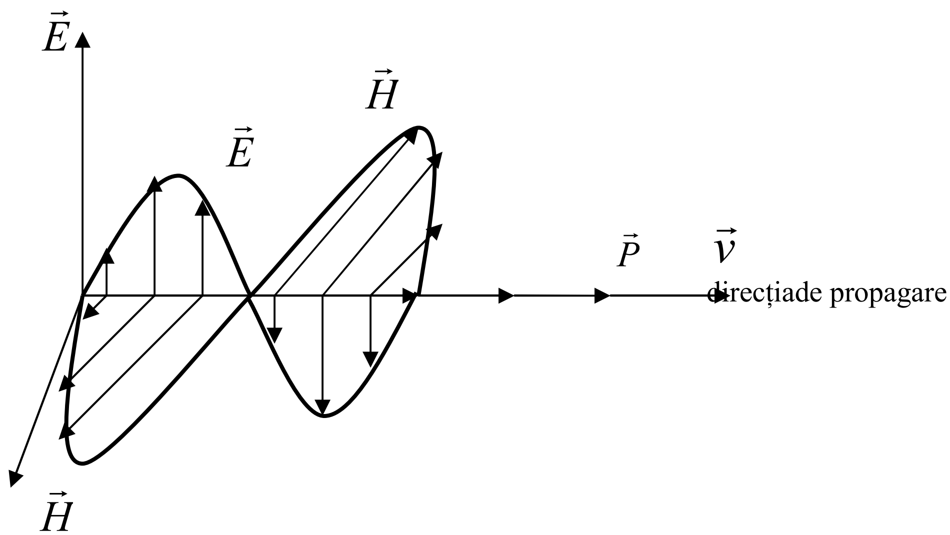
Dar $\omega = kv$:

$$
(41)\quad \begin{cases} -(\vec{i} \times \vec{H}) = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\,\vec{E} \\ +(\vec{i} \times \vec{E}) = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\,\vec{H} \end{cases}
$$

Din relația (41) rezultă că $\vec{E}$ este perpendicular pe planul format de $\vec{i}$ şi $\vec{H}$, iar $\vec{H}$ este perpendicular pe planul format de $\vec{i}$ şi $\vec{E}$, adică $\vec{E} \perp \vec{H}$.

În plus: $\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$ (27)

Astfel raportul mărimilor vectorilor E şi H nu depinde de timp, deci cei doi vectori au aceiaşi fază.



Reprezentarea grafică a unei unde electromagnetice

Viteza de propagare a undelor electromagnetice în vid, din teoria lui Maxwell, rezultă:

$$
(42)\quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \begin{cases} \varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ F/m \\ \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{7}\ H/m \end{cases}
$$

se obține $c = 3 \cdot 10^8 \, m/s$, adică tocmai viteza de propagare a luminii în vid. Acest fapt a permis lui Maxwell să se afirme că lumina este o undă electromagnetică, formulând teoria electromagnetică a luminii.
Cu ajutorul relației (27) obținem:

$$w = \frac{1}{2}(E \cdot D + B \cdot H) = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2) = \mu H^2 = \varepsilon E^2$$

Deci densitatea de energie în cazul câmpului electromagnetic este:

$$w = \mu H^2 = \varepsilon E^2 \quad (28)$$

Intensitatea undelor electromagnetice o vom defini ca energia transportată de undă în unitatea de timp prin unitatea de suprafață, aşezată normal la direcția de propagare.

$$I = cw = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\mu H^2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H^2 = E \cdot H = \left|\vec{E} \times \vec{H}\right| \quad (29)$$

Se poate defini un vector $\vec{P}$ în modul următor:

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (30)$$

$\vec{P}$ se numeşte vectorul lui Poynting şi are modulul egal cu intensitatea undei electomagnetice; este orientat în lungul direcției de propagare pentru mediul izotrop şi are direcții diferite pentru mediile anizotrope. Calculând fluxul acestui vector printr-o suprafață avem:

$$\int_s \vec{P} \cdot d\vec{S} = \int_s (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{S} = \frac{\partial W}{\partial t} \quad (31)$$

Deci fluxul vectorului Poynting printr-o suprafață S este egal cu energia transportată de unda electromagnetică în unitatea de timp prin acea suprafață.

Undele electromagnetice sunt clasificate pe baza lungimii lor de undă, extinsă pe un larg domeniu, incepând cu cele a caror lungime de undă este de ordinul a $10^5 m$ şi sfârşind cu cele a căror lungime de undă este de ordinul $10^{-13} m$. acest larg domeniu al lungimilor de undă implică multiple

aplicații ale undelor electromagnetice în tehnica curentă şi evident mijloacele de producere şi detectare diferite.